1109. ノルム環トSegalノ定理ニツイテ II

岩澤 健吉 (東大)

§1. 談話1088[1]ノツヅキトシテ, ソコニ述べタ結果ヲHilbert空間ニ於ケルoperatorニヨル表現ノ場合ニ拡張シマス。

群 G, 群環 $L(G)$ 等ハ (I) ニ於ケルト同ジモノトシ又 $\mathfrak{H}$ ヲHilbert空間, B ヲ $\mathfrak{H}$ ニ於ケル凡テノbounded operatorガツクル環トシマス。

始メニ言葉ノ説明ヲシテオキマス。

1) B ニ於ケル G ノ表現 $g \to D(g)$ $(D(g) \in B)$ ガ固有デアルトハ $D(e)=1$ ナルコト。

コヽニ e ハ G ノ単位元, 1 ハ $\mathfrak{H}$ ニ於ケルunit operatorデス。

又 $D(g)$ ガ一様ニ有界ナトキ即チ

$$\|D(g)\| \leq C, \quad g \in G$$

ナル常数 C ガ存在スルトキ, 表現ハ有界デアルト云フコトニシマス。

2) B ニ於ケル $L(G)$ $(=L^{(1,P)}(G))$ ノ表現 $x(g) \longrightarrow A(x)$ $(A(x) \in B)$ ガ固有デアルトハ凡テノ $x(g) \in L(G)$ ニ対シ $A(x)f=0$ トナル如キ $\mathfrak{H}$ ノ元 f ハ $f=0$ ニ限ルコト。

---

1) コレヲ以下(I)トシテ引用シマス。

又，ソレガ連續デアルト云フノハ

$$\|A(x)\| \leq C\|x\|_1, \quad x(g) \in L(G)$$

ナル如キ常數 C ガ存在スルコト，即チ $L(G)$ ニ於ケル norm $\|x\|_1$ カラ B ノ uniform topology ヘノ寫像ガ連続デアルコトヲ意味シマス。

サテ（I）ノ定理9ニ對應シテ次ノ定理ガ成立シマス。

定理I. $L^{(1,p)}(G)$ ノ B ニ於ケル連續固有表現 $x \to A(x)$ ト G ノ B ニ於ケル有界可測[2)]固有表現 $g \to D(g)$ トハ次ノ意味デ一対一ニ對應スル：

i) $L^{(1,p)}(G)$ ノ表現 $x \to A(x)$ ニ對シテ適當ナ G ノ表現 $g \to D(g)$ ガ存在シテ

$$(1) \quad A(x) = \int_G x(g) D(g) dg$$

トナル．且コノ様ナ $D(g)$ ハ唯一ツ定マル。

ii) $g \to D(g)$ ガ G ノ表現デアレバ (1) ニヨリ $A(x)$ ヲ定義スレバ $x \to A(x)$ ハ $L^{(1,p)}(G)$ ノ表現トナル。

iii) i), ii) ノ對應ハ互ニ他ノ逆デアル。

iv) 共軛ナ表現ニハ共軛ナ表現ガ對應スル。

(注意) (1) ノ意味ハ任意ノ $f, f' \in \mathfrak{H}$ ニ対シ

$$(2) \quad (A(x)f, f') = \int_G x(g) (D(g)f, f') dg$$

---

2) 任意ノ $f, f' \in \mathfrak{H}$ ニ対シ $(D(g)f, f')$ ガ可測ナルコト。

ガ成立スルコト。

以下同様ナ記法ヲ用ヒルコトニシマス。

証明.

iii), iv) ハ i), ii) 殊ニ表現ノ一意性カラ容易ニワカリマスカラ i), ii) ヲ証明シマス。

ii) ノ証明:

假定ニヨリ $\|D(g)\| < C$ トスレバ

$$(3) \quad \left|\int_G x(g)\left(D(g)f, f'\right)dg\right| \leqq \int_G |x(g)|\,|(D(g)f, f')|\,dg$$

$$\leqq \int_G |x(g)|\cdot C\|f\|\|f'\|\,dg$$

$$= C\|x\|_1\|f\|\|f'\|$$

ヨッテ任意ノ $f, f' \in \mathfrak{H}$ ニ對シ $\int_G x(g)\left(D(g)f, f'\right)dg$ ハ常ニ存在シ, 明ニソレハ f ニ対シ linear 又 f' ニ對シ conjugate linear デスカラ (3) カラ F. Riesz ノ定理ニヨリ (2) ヲ満足スル operator $A(x)$ ガ存在シテ

$$(4) \quad \|A(x)\| \leqq C\|x\|_1$$

トナリマス。$x \to A(x)$ ガ $L(G)$ ノ表現ニナッテヰルコトハ (I) ニ於ケルト全様ノ計算ニヨリ確カメラレマス。(4) ニヨリソレハ又連続デス サテ凡ベテノ $x(g) \in L(G)$ ニ対シ $A(x)f_0 = 0$ ナル如キ $f_0 \in \mathfrak{H}$ ガ存在シタトスレバ任意ノ $f' \in \mathfrak{H}$ ニ対シ $(A(x)f_0, f') = 0$. 即チ (2) カラ

$$\int_G x(g)(D(g)f_0, f')\,dg = 0$$

コ、デ $x(g) \in L(G)$ ハ任意デスカラ測度 0 ノ g ノ集合ヲ除イテ

$$(D(g)f_0, f') = 0$$

除外スベキ測度 0 ノ集合ハ勿論一般ニ f' ニ関係シマスカラコレヲ $E_{f'}$ トカクコトニシマス。

$\mathfrak{h}_f$ ノ一ツノ完全正規直交系ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ トシ

$E_0 = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\varphi_i}$ トオカバ E_0 ノ測度モ亦 0 デスカラ $g_0 \notin E_0$ ナル g_0 ガ存在シマス。ヨッテ

$$(D(g_0)f_0, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots$$

コレカラ $D(g_0)f_0 = 0$. ヨッテ $D(g_0^{-1})D(g_0)f_0 = D(e)f_0 = 1 \cdot f_0 = 0$, 即チ $f_0 = 0$ デ $x \to A(x)$ ハ固有表現デス。

i) ノ証明：　$x(g) \to A(x)$ ヲ與ヘラレタ連續固有表現トシ $\|A(x)\| \leq C\|x\|_1$ トシマス。任意ノ $f, f' \in \mathfrak{h}$ ニ對シ

$$(5) \quad |(A(x)f, f')| \leq \|A(x)\| \, \|f\| \, \|f'\| \leq C\|x\|_1 \|f\| \, \|f'\|$$

ナル故 (I) ニ於ケルト全様ニシテ

$$(6) \quad (A(x)f, f') = \int_G x(g)\, u_{f,f'}(g)\,dg$$

ヲ満足スル可測函数 $u_{f,f'}(g)$ が存在シ (5) カラ

(7) $$|u_{f,f'}(g)| \leqq C\|f\|\,\|f'\|$$

トナリマス。f, f' ヲ與ヘレバ (6) ニヨリ函数 $u_{f,f'}(g)$ ハ測度 0 ヲ除イテ定マリマスカラ任意ノ $f_1, f_2, f_1', f_2' \in \mathfrak{H}_y$，$\alpha, \beta \in K$（複素数体）ニ対シ

(8) $$u_{f_1+f_2,f'}(g) \sim u_{f_1,f'}(g) + u_{f_2,f'}(g)$$

$$u_{f,f_1'+f_2'}(g) \sim u_{f,f_1'}(g) + u_{f,f_2'}(g)$$

$$u_{\alpha f,f'}(g) \sim \alpha u_{f,f'}(g)$$

$$u_{f,\beta f'}(g) \sim \bar{\beta} u_{f,f'}(g)$$

但シ $\sim$ ハ両辺が測度 0 ヲ除イテ一致スルコトヲ示シマス。

サテ $\mathfrak{H}_y$ ノ一ツノ完全正規直交系ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ トシ又有理複素数ノ全体ヲ $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots$ トシマス。ρ_j ヲ係数トスル有限個ノ φ_i ノ一次結合ノ全体ヲ $\mathfrak{L}$ トスレバ $\mathfrak{L}$ ハ可附番集合デス。

ヨッテ (8) ニ於テ $f, f', f_1, f_2, f_1', f_2'$ が $\mathfrak{L}$ ノ凡テノ元ヲ動キ α, β が凡テノ有理複素数ヲ動イタトシテモ カクシテ得ラレル (8) ノ如キ関係式ハ可附番個デスカラ適當ニ測度 0 ナル集合 E_0 ($\mu(E_0) = 0$) ヲトレバ $g \notin E_0$ ニナルトキ $\mathfrak{L}$ ニ屬スル $f, f', \cdots\cdots$ 及ビ有理複素数 α, β ニ対シテハ (8) ハ等式トナリマス。

ヨッテ $g \neq E_0$ ナル g ヲ一ツ定メレバ $u_{f,f'}(g)$ ハ $\mathfrak{L}$ ニ属スル f ニ對シ linear, 又 f' ニ對シテハ Conjugate linear トナリ且ツ (7) ガ成立シマス。$\mathfrak{L}$ ハ $\mathfrak{h}_g$ ニ於テ dense デスカラ, コレカラ $u_{f,f'}(g)$ ヲ凡テノ $f, f' \in \mathfrak{h}_g$ ニ対シ定義サレ, f ニ対シ linear, f' ニ對シ conjugate linear ナ functional $u^*_{f,f'}(g)$ ニ拡張スルコトガ出来マス。(7) ニヨリ

$$|u^*_{f,f'}(g)| \leq C\|f\|\|f'\|$$

ヨッテ $g \neq E_0$ ナル假定ノモトニ

$$(9) \quad (D_1(g)f, f') = u^*_{f,f'}(g)$$

$$(10) \quad \|D_1(g)\| \leq C$$

ナル如キ $\mathfrak{B}$ ノ operator $D_1(g)$ ガ存在スルコトガワカリマス。$g \in E_0$ ノトキニハ $D_1(g) = 0$ ト定義シテオキマス。

サテ $f, f' \in \mathfrak{L}$ トスレバ, $g \neq E_0$ ナルトキ

$$(D_1(g)f, f') = u^*_{f,f'}(g) = u_{f,f'}(g)$$

ナル故 $\mu(E_0) = 0$ ニ注意スレバ

$$(11) \quad (A(x)f, f') = \int_G x(g)(D_1(g)f, f')\,dg$$

上ノ等式ノ両辺ハ f, f' ニ関シ連續デスカラ $\mathfrak{L}$ ガ $\mathfrak{h}_g$ デ dense ナルコトヲ用ヒレバ上記等式ハ任意ノ $f, f' \in \mathfrak{h}_g$ ニ対シ成立スルコトガ知レマス。

$A(x * y) = A(x) \cdot A(y)$ ナル関係ヲ (11) 式ニ代入シ

テ計算スレバ

$$\int_{G\times G} x(g)y(h)\left(D_1(g)D_1(h)f, f'\right)dg\,dh$$

$$=\int_{G\times G} x(g)y(h)\left(D_1(gh)f, f'\right)dg\,dh$$

ヨッテ $G\times G$ ニ於テ測度 0 ナル集合 $E_{f,f'}$ ヲ除ケバ

(12) $\left(D_1(g)D_1(h)f, f'\right)=\left(D_1(gh)f, f'\right)$

f, f' ガ $\mathfrak{L}$ ノ凡テノ元ヲ動リトキ，$E_{f,f'}$ ノ和ヲ E_1 トスレバ E_1 ノ測度モ 0 デ且ツ $(g, h)\notin E_1$ ナラバ $\mathfrak{L}$ ニ屬スル任意ノ f, f' ニ對シ (12) ガ成立シマス。然ルニ (12) ノ両辺ハ f, f' ニ關シ連續デスカラ，ソレハ又 $\mathfrak{H}$ ノスベテノ f, f' ニ對シ成立シマス。即チ $D_1(g)D_1(h)=D_1(gh)$。ヨッテ G ニ於テ測度 0 ナル適當ナ集合 E_2 ヲトレバ $h\notin E_2$ ナルトキ $\mu(E_h)=0$ ナル集合 E_h ガ定マッテ $g\notin E_h$ ナルトキ

(13) $D_1(g)D_1(h)=D_1(gh)$

トナリマス。(Fubini ノ定理)

故ニ $a\notin E_2$ ナラバ

$\left(A(a^{-1}x)f, f'\right)$

$$=\int_G x(ga^{-1})\left(D_1(g)f, f'\right)dg=\int_G x(g)\left(D_1(ga)f, f'\right)dg$$

$$=\int_G x(g)\left(D_1(g)D_1(a)f, f'\right)dg=\left(A(x)D_1(a)f, f'\right)$$

即チ

(14) $A(a^{-1}x) = A(x)D_1(a), \quad a \notin E_2$

サテ $\mu(E_2) = 0$ ナル故 $\mu(E_2^{-1}) = 0$. ヨッテ $E_3 = E_2 \cup E_2^{-1}$ トオケバ $E_3^{-1} = E_3$ 且ツ $\mu(E_3) = 0$.

又 G ノ任意ノ元 g ハ $g = g_1 g_2$, $g_1, g_2 \notin E_3$ ナル形ニカクコトガ出来マス。ソコデ

(15) $D(g) = D_1(g_1)D_1(g_2), \quad g = g_1 g_2, \ g_1, g_2 \in E_3$

ト定義シマス。

先ヅ (15) ノ定義ニ於テ右辺ガ g ニノミ関係シテ定マルコトヲ云ハネバナリマセンガ，モット一般ニ $g = g_1 g_2 \cdots\cdots g_r = g_1' g_2' \cdots\cdots g_s'$ ノ $g_i, g_j' \notin E_3$ ナラバ $D_1(g_1)D_1(g_2)\cdots\cdots D_1(g_r) = D_1(g_1')\cdots\cdots D_1(g_s')$ ナルコトヲ証明シマス。$x(g) \in L(G)$ ヲ任意ニトレバ (14) ニヨリ

$$A(g^{-1}x) = A(g_r^{-1} g_{r-1}^{-1} \cdots\cdots g_2^{-1} g_1^{-1} x)$$

$$= A(g_r^{-1}(g_{r-1}^{-1} \cdots\cdots g_1^{-1} x)) = A(g_{r-1}^{-1} \cdots\cdots g_1^{-1} x) D_1(g_r)$$

$$= \cdots\cdots = A(x) D_1(g_1) D_1(g_2) \cdots\cdots D_1(g_r)$$

同様ニ

$$A(g^{-1}x) = A(x) D_1(g_1') D_1(g_2') \cdots\cdots D_1(g_s')$$

ヨッテ $f \in h_y$ ヲ任意ニトルトキ

$$0 = A(g^{-1}x)f - A(g^{-1}x)f$$

$$= A(x)D_1(g_1)\cdots\cdots D_1(g_r)f - A(x)D_1(g_1')\cdots\cdots D_1(g_s')f$$

$$-A(x)\{D_1(g_1)\cdots\cdots D_1(g_r)-D_1(g_1')\cdots\cdots D_1(g_s')\}f$$

$x(g)\to A(x)$ ハ假定ニヨリ固有表現デスカラ，コレカラ

$$\{D_1(g_1)\cdots\cdots D_1(g_r)-D_1(g_1')\cdots\cdots D_1(g_s')\}f=0,$$

$f\in\mathfrak{H}_y$ ハ任意ナル故

$$D_1(g_1)\cdots\cdots D_1(g_r)-D_1(g_1')\cdots\cdots D_1(g_s)$$

ヨッテ (15) ニヨリ実際一意的ニ $D(g)$ ナル operator ガ凡テノ $g\in G$ ニ對シ定義サレマス。

(10) ニヨリ

$$|||D(g)|||\leq|||D_1(g_1)|||\cdot|||D_1(g_2)|||\leq C^2$$

又 $g=g_1g_2$, $g'=g_1'g_2'$, $gg'=g_1''g_2''$ ノ $g_1, g_2, g_1', g_2', g_1'', g_2''\in E_3$ トスレバ $g_1g_2g_1'g_2'=g_1''g_2''$ ナル故

$$\begin{aligned}D(gg')&=D_1(g_1'')D_1(g_2'')\\&=D_1(g_1)D_1(g_2)D_1(g_1')D_1(g_2')\\&=D(g)D(g')\end{aligned}$$

ヨッテ $g\to D(g)$ ハ有界表現デス。

又 $e=gg^{-1}$, $g\in E_3$ トスレバ定義ニヨリ

$$D(e)=D_1(g)D_1(g^{-1})$$

デスガ

$$A(ex)=A(x)=A(g^{-1}gx)=A(x)D_1(g)D_1(g^{-1})$$

カラ前ト同様ニシテ $D_1(g)D_1(g^{-1})=1$, 即チ $D(e)=1$ デソレガ固有表現デアルコトガ知ラレマス。

サテ $h_0\in E_3$, 從ッテ勿論 $h_0\in E_2$ ナル如キ h_0 ヲトリ

$(E_3 \smile E_{h_0})\, h_0 = E_4$ トシマス。

$$\mu(E_4) = \mu((E_3 \smile E_{h_0})\, h_0) = \mu(E_3 \smile E_{h_0})$$
$$\leq \mu(E_3) + \mu(E_{h_0}) = 0$$

即チ $\quad \mu(E_4) = 0$

$g \notin E_4$ ヲ任意ニトリ

$$g = g' h_0$$

トオケバ $g' \notin E_3 \smile E_{h_0}$，即チ $g', h_0 \notin E_3$ デスカラ定義ニヨリ

$$D(g) = D_1(g')\, D(h_0)$$

一方 $g' \notin E_{h_0}$ ナル故 (13) カラ

$$D_1(g) = D_1(g' h_0) = D_1(g')\, D_1(h_0)$$

ヨッテ

(16) $\quad D(g) = D_1(g), \quad g \notin E_4 \quad (\mu(E_4) = 0)$

ツクリ方カラワカルヤウニ $(D_1(g) f, f')$ ハ可測デスカラ (16) ニヨリ $D(g)$ ハ可測表現デアルコトガワカリ又 (11) カラ

$$A(x) = \int_G x(g)\, D(g)\, dg$$

トナリマス。ヨッテ $D(g)$ ノ存在ハ証明サレマシタ。

次ニソノ一意性ヲ云ヒマス。今有界可測表現 $D'(g)$ ニヨリ

$$A(x) = \int_G x(g)\, D'(g)\, dg$$

トナッタトスレバ任意ノ $f, f' \in \mathfrak{H}_g$ ニ對シ

$$\int_G x(g)\,(D(g)f, f')\,dg$$

$$=\int_G x(g)\,(D'(g)f, f')\,dg$$

ヨッテ $\mu(E_{f,f'})=0$ ナル集合 $E_{f,f'}$ ヲ除キ

(16) $(D(g)f, f')=(D'(g)f, f')$

f, f' ガ $\mathfrak{H}$ ノ完全正規直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ ノ全体ヲ動クトキ $E_{f,f'}$ ノ和ヲ E_5 トスレバ矢張リ $\mu(E_5)=0$ デ $g \notin E_5$ ナラバ $f, f'=\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ ニ對シ(16)ガ成立シマス。然ルニ(16)ノ両辺ハ f, f' ニ関シ linear 且ツ連続デスカラ(16)ハ又 $g \notin E_5$ ニ対シテハ凡テノ $f, f' \in \mathfrak{H}$ ニ対シ成立シマス。即チ

(17) $D(g)=D'(g),\quad g \notin E_5,\quad (\mu(E_5)=0)$

コレカラ凡テノ $g \in G$ ニ対シ $D(g)=D'(g)$ トナルコトハ(I)ニ於ケルト同様デス。

§2 コノ§デハ G ハ左右ニ不変ノ測度ヲ有スルモノト仮定シマス。サウスレバ $x(g)$ ガ $L^{(1,p)}(G)$ ニ含マレレバ $\overline{x(g^{-1})}=x^*(g)$ ナル函數モ亦 $L^{(1,p)}(G)$ ニ含マレマス。$x \to x^*$ ハ $L^{(1,p)}(G)$ ノ逆同型ヲ與ヘマスカラ $L^{(1,p)}(G)$ ヲ $\mathfrak{B}$ 内デ表現スル場合 $A(x)$ ト $A(x^*)$ トガ互ニ adjoint ニナッテヰル場合ヲ考ヘルコトハ自然デアリマセウ。ヨッテ以下 $x(g) \to A(x)$ ハ

(18) $A(x)^* = A(x^*)$

ナル條件ヲ満足スル連續表現トシ，但シ固有デアルト云フコトハ假定シナイコトニシマス。サテ $\mathfrak{H}$ ニ於テ凡テノ $x(g)\in L(G)$ ニ対シ

$$A(x)f=0$$

トナルヤウナ f ノ全体ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ $\mathfrak{N}$ ハ明カニ閉線状部分空間トナリマス。ソノ complement ヲ $\mathfrak{M}$ トシマス。$\mathfrak{M}=\mathfrak{H}-\mathfrak{N}$. $\{A(x)\}$ ナル集合ハ各 operator ト共ニソノ adjoint ヲ含ム故 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ハ $\{A(x)\}$ ヲ "reduce" シマス。ソノ $\mathfrak{N}$ ニ於ケル部分ノ表現ハ 0－表現デスガ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル部分ハ固有表現 $A_1(x)$ ヲ與ヘマスカラ $\mathfrak{M}$ ニ対シテ定理1ヲ用ヒレバ

$$A_1(x)=\int_G x(g)\,D_1(g)\,dg$$

ナル G ノ表現 $D_1(g)$ ガ存在シマス。サテ

$$A_1(x^*)=\int_G \overline{x(g^{-1})}\,D_1(g)\,dg$$

$$\begin{aligned}(A_1(x^*)f,f')&=\int_G \overline{x(g^{-1})}\,(D_1(g)f,f')\,dg\\&=\overline{\int_G x(g^{-1})\,(D_1^*(g)f',f)\,dg}\\&=\overline{\int_G x(g)\,(D_1^*(g^{-1})f',f)\,dg}\end{aligned}$$

一方

$$(A_1(x^*)f,f')=(A_1(x)^*f,f')=\overline{(A_1(x)f',f)}$$

$$= \overline{\int_G x(g) (D_1(g) f', f) \, dg}$$

ヨッテ

$$\int_G x(g) (D_1^*(g^{-1}) f', f) \, dg = \int_G x(g) (D_1(g) f', f) \, dg$$

表現ノ一意性ヲ用ヒレバ，コレカラ

$$D_1^*(g^{-1}) = D_1^*(g)^{-1} = D_1(g)$$

即チ $D_1(g)$ ハスベテ unitary operator デアルコトガワカリマス。

逆ニ $D_1(g)$ ガ unitary ナラバ $A_1(x^*) = A_1(x)^*$ トナルコトハ上ノ計算ヲ逆ニタドッテ見レバワカリマス。

サア $\mathfrak{N}$ ニ於テ $D_2(g) = 0$ トシ

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & \\ \mathfrak{M} & D_2(g) \\ & \mathfrak{N} \end{pmatrix}$$

トオケバ明カニ

$$A(x) = \int_G x(g) D(g) \, dg$$

且ツ　$D(g)^* = D(g^{-1})$

トナリマス，ヨッテ

定理2　G ノ測度ガ左右ニ不変トスレバ $A(x^*) = A(x)^*$ ヲ満足スル $L^{(1,P)}(G)$ ノ B ニ於ケル連続表現 $x \to A(x)$ ト $D(g)^* = D(g^{-1})$ ヲ満足スル G ノ B ニ於ケル有界可測表現トハ定理1ノ意味デ一對一ニ對應スル。特ニ $A(x)$ ガ

固有表現デアレバソレニ對應スル $D(g)$ ハ unitary 表現デアリ逆モ亦成立スル。

§3. 今マデ G ノ測度ハ右ニ不変(又ハ特ニ左右ニ不変)ト考ヘテ来タノデスガ,コノ§デハ左ニ不変ノ測度ヲトルコトニシマス。[3] サウシテモ今マデノ議論ハスベテ成立シマス。唯

$$x \times y(g) = \int_G x(h)\, y(h^{-1}g)\, dg$$

トナリ (I), (8) ノ代リニ

$$(19) \quad \|x \times y\|_p \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_p,$$
$$x(g) \in L^1(G), \quad y(g) \in L^p(G)$$

ガ成立シマス。

サテ $L^{(1,2)}(G)$ ハ Hilbert 空間 $L^2(G)$ 内デ dense ナ線状部分空間トナッテ来マスガ,コノデ

$$(20) \quad A_x \cdot y = x \times y, \qquad x, y \in L^{(1,2)}(G)$$

トオケバ (19) ニヨリ

$$(21) \quad \|A_x \cdot y\|_2 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_2$$

ヨッテ A_x ハ bounded ナ operator トナリマス。故ニ A_x ヲ $L^{(1,2)}(G)$ カラ $L^2(G)$ 全体ニマデ拡張スルコトガ出

---

3) ソノ理由ハ以下参照。始メカラ全部左ニ不変ノ測度デ議論シテオケバヨカッタノデス。

来マスガソノ結果ハ明カニ

$$A_x y = x \times y$$

$$= \int x(h)\, y(h^{-1}g)\, dh, \quad x \in L^{(1,2)}(G),\ y \in L^2(G)$$

ニヨリ與ヘラレマス。(21)ハソノマヽ成立シマスカラ

(22) $\quad \| A_x \| \leqq \| x \|,$

又

$$A_{x \times y} \cdot z = (x \times y) \times z = x \times (y \times z) = A_x \cdot A_y z$$

即チ

(23) $\quad A_{x \times y} = A_x \cdot A_y$

(22), (23) ニヨリ $x(g) \to A(x)$ ハ $L^{(1,2)}(G)$ ノ連続表現デアルコトガ分リマス。

ソレハ有限次ノ Algebra ニ於ケル左カラノ正規表現ノ拡張ト考ヘラレマス。〔同様ニシテモシ右ニ不変ナ測度ヲ用ヒテ $A'_x y = y \times x$ トオケバ右カラノ正規表現ヲ得マスガ，ソレハ有限次元ノ場合ト同様ニ逆同型ヲ與ヘルコトニナリマスノデ，ソレヲ避ケテ左ニ不変ナ測度ヲトリマシタ〕

サテ，コノ $A(x)$ ＝ §1，定理1ノ意味デ對應シテキル G ノ表現ハ何カト云フトソレハ

$$(A_x y, z) = \int_G A_x \cdot y(g) \cdot \overline{z(g)}\, dg$$

$$= \int_G \left(\int_G x(h)\, y(h^{-1}g)\, dh \right) \overline{z(g)}\, dg$$

$$= \iint_{G \times G} x(h)\, y(h^{-1}g)\, \overline{z(g)}\, dg\, dh$$

$$= \int_G x(h) \left\{ \int_G y(h^{-1}g)\, \overline{z(g)}\, dg \right\} dh$$

$$= \int_G x(h) \left(U(h)\, y, z \right) dh$$

コノ計算カラワカル様ニ $y(g) \to y(h^{-1}g)$ ナル unitary operator $U(h)$ デアリマス。コノ意味デ $U(h)$ ヲ G ノ正規表現ト云ッテモヨイカト思ヒマス。

§4. コンデモ左－不変ノ測度ヲトルコトニシマス。サテ $L^{(1,P)}(G)$ ニ含マレル函数 $x(g)$ ニ對シ函數 $x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}$ ヲ考ヘレバ G ノ測度ガ左右不変デナイトキハ $x^*(g)$ ハ必ズシモ $L^{(1,P)}(G)$ ニ属シマセンガ $x(g)$, $x^*(g)$ ガ共ニ $L^{(1,P)}(G)$ ニ含マレルヤウナ $x(g)$ ノ全体 $\mathfrak{R}$ ハ norm $\|x\|_1$ ニ関シテ dense ナ $L^{(1,P)}(G)$ ノ部分環ヲツクリマス。

ソレガ部分環ヲツクルコトハ明ラカデスガ dense デアルコトハ例ヘバ G ノ bicompact (compact) ナ部分集合ノ特性函數ガスベテ $\mathfrak{R}$ ニ含マレルコトカラ知ラレマス。

G ノ一ツノ unitary 表現 $D(g)$ ガ與ヘラレタモノトシソレニ對應スル $L^{(1,P)}(G)$ ノ表現ヲ $A(x)$ トシマス。

$$A(x)=\int_G x(g)D(g)dg$$

又 B ニ於テ

$$A=\{A(x);\ x\in L^{(1,p)}(G)\},$$
$$M=\{A(x);\ x\in \mathfrak{X}\}$$

トオケバ $\mathfrak{X}$ ハ $L^{(1,p)}(G)$ デ dense デ $x\to A(x)$ ハ連續デスカラ M ハ A ニ於テ uniform topology ニ關シ dense, 從ッテ勿論 strong topology ニ關シ dense トナリマス。

§2 ノ計算カラ明カナヤウニ、一般ニ A, B ナル operator ガ M ニ含マレレバ $A+B$, αA, AB, A^* モ亦 M ニ含マレマスカラ strong topology ニ關スル M ノ closure ヲ $\overline{M}$ トスレバ

(24) $\quad R(M)=\overline{M}$

但シコヽニ $R(M)$ ハ M カラ生成サレタ Neumann ノ意味ノ operator ring デアリマス。[4)]

M ハ A 内デ dense ナル故 $\overline{M}\supset A$, 即チ $R(M)\supset A$, ヨッテ $R(M)\supset R(A)$. 一方 $R(M)\subset R(A)$ ハ明カデスカラ

---

4) J. v. Neumann: Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. 102. (1930)

(25) $\quad \bar{M} = \bar{A} = R(M) = R(A)$

サテ任意ノ $x(g) \in L^{(1,P)}(G)$ ヲトルトキ (14) ニ於ケルト同様ノ計算デ

$$A(xa^{-1}) = D(a)\,A(x)$$

但シ $xa^{-1}(g) = x(a^{-1}g)$ トシマス。[5] 又

$$\|D(a)A(x) - A(x)\| = \|A(xa^{-1}) - A(x)\|$$
$$= \|A(xa^{-1} - x)\| \leq C\,\|xa^{-1} - x\|,$$

xa^{-1} ハ x ヲ定メレバ a ニ関シ norm $\|x\|_1$ デ連続デスカラ $D(a)\,A(x)$ モ亦 x ヲ定メレバ a ニ関シ uniform topology デ連続デス。

$R(A)$ ニ含マレル任意ノ operator A 及ビ任意ノ $f \in \mathfrak{h}$, $\varepsilon > 0$ ガ與ヘラレタトシマス。(25) ニヨリ $R(A)$ ハ A ノ strong topology ニ関スル closure デスカラ

$$\|(A - A(x))f\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ナル $A(x)$ ガ存在シマス。又 G ニ於ケル単位 e ノ近傍 $\mathfrak{U}(e)$ ヲ適當ニトレバ $a \in \mathfrak{U}(e)$ ナルトキ

$$\|(D(a)A(x) - A(x))f\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ヨッテ $D(a)$ ガ unitary ナルコトカラ

---

5) コヽデハ左-不変ノ測度ヲ用キテヰルコトニ注意。

$$\|(D(a)A - A)f\| \leq \|(D(a)A - D(a)A(x))f\|$$
$$+\|(D(a)A(x) - A(x))f\| + \|(A(x) - A)f\|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

即チ f, $\varepsilon > 0$ ニ對シ $\mathfrak{U}(e)$ ヲ適當ニトレバ $a \in \mathfrak{U}(e)$ ナルトキ

$$\|(D(a)A - A)f\| \leq \varepsilon,$$

ヨッテ $D(a)A$ ハ A ヲ定メタ場合 *strong topology* ニ關シ連続デアルコトガワカリマス。

サテ $R(A)$ ニ含マレル最大ノ *projection* ヲ E_0 トスレバ任意ノ $A \in R(A)$ ニ對シ $E_0 A = A E_0 = A$ [6)] ヨッテ特ニ

$$(26) \quad A(x) = A(x)E_0 = \int_G x(g) D(g) E_0 \, dg$$

$D(g)E_0 = \overline{D}(g)$ トオケバ $\overline{D}(g)$ ハ明カニ有界可測，且ツソレハ $R(A)$ ニ含マレマス。（何トナレバ任意ノ $A(x)$ ニ對シ $D(a)A(x) = A(xa^{-1}) \in A$，ヨッテソノ *closure* ヲトッテ見レバ任意ノ $A \in R(A)$ ト共ニ $D(a)A$ モ亦 $R(A)$ ニ含マレマス。）ヨッテ $E_0 \overline{D}(g) = \overline{D}(g)$，故ニ

$$\overline{D}(g)\overline{D}(h) = D(g)E_0\overline{D}(h) = D(g)\overline{D}(h)$$
$$= D(g)D(h)E_0 = D(gh)E_0$$
$$= \overline{D}(gh)$$

---

6) 脚註4）ノ論文参照

即チ $g \to \overline{D}(g)$ ハ G ノ表現デ且(26)カラ

$$A(x) = \int_G x(-g)\overline{D}(g)\,dg$$

トナリマスカラ一意性ニヨリ $\overline{D}(g) = D(g)$，即チ

(27) $D(g)E_0 = D(g)$

故ニ $D(g)$ ハ $R(A)$ ニ含マレマス。又一方

$$(A(x)f, f') = \int_G x(g)(D(g)f, f')\,dg$$

カラ明ラカナヤウニ $A(x)$ ハ $D(g)$ カラ生成サレル Neumann ノ意味ノ operator ring $R(D(g))$ (ソレハ weakly closed ナル故) ニ含マレマスカラ次ノ定理ヲ得マス.

定理 3.

$$R(A(x)) = R(D(g))$$

サテ $D(g)E_0$ ハ E_0 ヲ定メレバ g ニ関シ連續 (strongly) デアッタノデスカラ(27)ニヨリ

定理 4. G ノ可測ナ unitary 表現 $D(g)$ ハスベテ strong topology ニ関シ連續デアル。

コトガ証明サレマシタ。[6)]

---

6) コノ定理ハ measure ト topology ノ関係ヲ用ヒテ小平サンガ始メテ証明サレタモノデス:

K. Kodaira: Über die Gruppen der messbaren

Abbildungen, 學士院記事 17.